

Эта статья поставлена в интернете 16.02.2026 г. и не была отправлена ни в один журнал в связи с **негласным запретом для сторожей публиковаться в журналах ВАК России**. Подробней – в конце статьи «Структура общего решения уравнения Эрмита и решение при отрицательных целых n »
https://archive.org/details/20260122_20260122_1442

УДК 517.923, 517.926.4

Структура общего решения уравнений для многочленов Якоби и Гегенбауэра, и решение при отрицательных целых n

Зайков С.Ю.

МАУ ДО «Спортивная школа зимних видов спорта Города Томска»

zaykov_tomsk@mail.ru

Аннотация: Рассматриваются дифференциальные уравнения для классических ортогональных многочленов Якоби и Гегенбауэра, структура их общего решения. Структурой общего решения считается линейная комбинация восьми частных решений, содержащих дробные производные. Найдены решения уравнений Якоби и Гегенбауэра для случаев, когда показатели дробных производных являются натуральными числами, в том числе найдены решения этих уравнений для отрицательных целых n . Приведен метод получения дробных производных с рациональными и иррациональными показателями, основанный на обыкновенных линейных дифференциальных уравнениях второго порядка.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, рекуррентные соотношения, дробные производные, многочлены Якоби, многочлены Гегенбауэра, формула Родрига, пробелы в справочниках.

1. Введение

Существует много областей, где применяются классические ортогональные многочлены. Начиная от физики и математики, до вычисления финансовых трендов и создания видео.

Дифференциальные уравнения для классических ортогональных многочленов содержат параметр n , и частным решением этих уравнений при неотрицательных целых n являются многочлены степени n . Причиной решений в виде многочленов является существование у этих дифференциальных уравнений формул Родрига, см. [1, с. 54], содержащих дробную производную, см. [2], с показателем n .

Вычисление значений этой дробной производной при неотрицательных целых показателях означало, что частными решениями являются многочлены. Поскольку дробная производная с отрицательным целым показателем является многократным интегралом, то до недавних пор решения дифференциальных уравнений для классических ортогональных многочленов при отрицательных целых n были неизвестны из-за сложностей такого интегрирования.

Ситуация изменилась, когда в [3] было введено новое понятие структуры общего решения для некоторых обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, в том числе, для дифференциальных уравнений для классических ортогональных многочленов. В отличие от традиционного понятия структуры общего решения, подразумевавшего линейную комбинацию двух линейно независимых частных решений, такой структурой называлась линейная

комбинация двух, четырех, или восьми частных решений, содержащих дробные производные, т.е. частных решений вида

$$y_k(x) = C_k f_k(x) (g_k(x))^{(m_k)}. \quad (1)$$

Эти дробные производные рассматриваются именно как дробные производные, т.е. имеют смысл при любых вещественных показателях, включая отрицательные и иррациональные. Например, формула Родрига считается имеющей смысл при любых вещественных n , т.е. ее применение не ограничивается вычислением решений дифференциальных уравнений при неотрицательных целых n .

Поскольку дробные производные определяются неоднозначно, то дробные производные, являющиеся частью частных решений (1) дифференциальных уравнений, должны соответствовать этим уравнениям, т.е. быть частью решения этих уравнений.

В теореме 1 в [3] было доказано, что при определенных условиях частные решения линейных дифференциальных уравнений вида (1) образуют пары, у которых показатели производных имеют разные знаки, и был дан метод, как при известном частном решении вида (1) найти второе, образующее с ним пару. Этот метод был применен в [4] для уравнения Лагерра.

Были найдены такие пары для всех классических ортогональных многочленов. Следовательно, были найдены решения уравнений классических ортогональных многочленов для отрицательных целых n . Это решение при отрицательных целых n для уравнения Эрмита приведено в [3], для уравнения Лагерра в [4]. Остальные приводятся в этой работе.

Структуры общих решений дифференциальных уравнений классических ортогональных многочленов, а также ряда других известных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, не являющимися уравнениями классических ортогональных многочленов, содержат либо две, либо четыре, либо восемь дробных производных.

Структура общего решения, содержащая две дробных производных, была представлена в [3] на примере уравнения Эрмита. Структура общего решения, содержащая четыре дробных производных, была представлена в [4] на примере уравнения Лагерра. Структура общего решения, содержащая восемь дробных производных, представлена в этой работе.

Структуры общих решений дифференциальных уравнений, не являющимися уравнениями классических ортогональных многочленов, не являются предметом этой работы. В дальнейшем планируется их представить.

Структура общего решения позволяет рассматривать решение как единой целое, со всеми его взаимосвязями, а не как набор частных решений.

Решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка является линейной комбинацией двух его независимых частных решений. Поэтому, в случае, когда структура содержит две или четыре пары дробных производных (т.е. четыре или восемь), то любая из них может быть представлена линейной комбинацией любых двух других. Это приводит к парадоксу многократного интегрирования, когда многократный интеграл можно получить путем многократного дифференцирования, рассмотренному в [4] на примере уравнения Лагерра.

Если структура содержит четыре пары дробных производных (т.е. восемь), то появляется возможность представлять дробные производные с рациональными или иррациональными показателями как линейную комбинацию двух дробных производных с натуральными показателями, т.е. как линейную комбинацию известных функций.

Такая возможность получения значений дробных производных с рациональными или иррациональными показателями как линейной комбинации двух известных функций будет рассмотрена в данной работе на примере уравнения Якоби.

Но получение таких дробных производных не будет исследоваться в полном объеме, поскольку это не является темой данной работы.

2. Структура общего решения дифференциального уравнения для многочленов Якоби

Рассмотрим дифференциальное уравнение для многочленов Якоби,

$$(1 - x^2)y''(x) + (b - a - (a + b + 2)x)y'(x) + n(n + a + b + 1)y(x) = 0, \quad (2)$$

см. [1, с. 268–281], [5, с. 171]. Найдем структуру его общего решения в виде линейной комбинации частных решений, содержащих дробные производные, вида (1). Известна формула Родрига

$$2^n n! P_n(x; a, b) = (-1)^n (1 - x)^{-a} (1 + x)^{-b} [(1 - x)^{n+a} (1 + x)^{n+b}]^{(n)}, \quad (3)$$

Из (3) получим первую часть структуры:

$$y_1(x) = (x - 1)^{-a} (1 + x)^{-b} [(x - 1)^{n+a} (1 + x)^{n+b}]^{(n)}. \quad (4)$$

Из теоремы 1 в [3] получим вторую часть структуры:

$$y_2(x) = ((x + 1)^{-b-n-1} (x - 1)^{-a-n-1})^{(-n-1)}. \quad (5)$$

Покажем, что (5) является частью структуры. Функция

$$t(x) = (x + 1)^{m-b} (x - 1)^{m-a}, \quad (6)$$

удовлетворяет уравнению

$$(x + 1)(x - 1)t'(x) + ((a + b - 2m)x + a - b)t(x) = 0, \quad (7)$$

и если продифференцировать уравнение (7) $m + 1$ раз, то получим

$$(x + 1)(x - 1)t^{(m+2)}(x) + ((a + b + 2)x + a - b)t^{(m+1)}(x) + (m + 1)(a + b - m)t^{(m)}(x) = 0, \quad (8)$$

или

$$(x + 1)(x - 1)z_m''(x) + ((a + b + 2)x + a - b)z_m'(x) + (m + 1)(a + b - m)z_m(x) = 0, \quad (9)$$

где

$$z_m(x) = t^{(m)}(x) = ((x + 1)^{m-b} (x - 1)^{m-a})^{(m)}. \quad (10)$$

Пусть

$$m = -n - 1, \quad (11)$$

тогда из (9) получим (2), следовательно, частным решением уравнения (2) будет

$$z_{-n-1}(x) = ((x + 1)^{-b-n-1} (x - 1)^{-a-n-1})^{(-n-1)}. \quad (12)$$

Следовательно, (5) является частью структуры.

Найдем третью часть структуры. Функция

$$t(x) = (x + 1)^{m+b}(x - 1)^{m-a}, \quad (13)$$

отличается от функции (6) только знаком при b . Тогда, используя подстановку

$$b \Rightarrow -b, \quad (14)$$

получим из (8) уравнение для (13)

$$(x + 1)(x - 1)t^{(m+2)}(x) + ((a - b + 2)x + a + b)t^{(m+1)}(x) + (m + 1)(a - b - m)t^{(m)}(x) = 0, \quad (15)$$

или

$$(x + 1)(x - 1)z_m''(x) + ((a - b + 2)x + a + b)z_m'(x) + (m + 1)(a - b - m)z_m(x) = 0, \quad (16)$$

где

$$z_m(x) = t^{(m)}(x) = ((x + 1)^{m+b}(x - 1)^{m-a})^{(m)}. \quad (17)$$

Пусть

$$z_m(x) = (x + 1)^b y(x), \quad (18)$$

тогда из (16) получим

$$(x^2 - 1)y''(x) + ((a + b + 2)x + a - b)y'(x) + (m(a - b - m - 1) + ab + a)y(x) = 0. \quad (19)$$

Пусть

$$m = n + a, \quad (20)$$

тогда из (19) получим (2). Следовательно, из (17), (18), (20) получаем, что

$$y_3(x) = (x + 1)^{-b}((x + 1)^{a+b+n}(x - 1)^n)^{(a+n)}, \quad (21)$$

является частью структуры общего решения уравнения Якоби.

Из теоремы 1 в [3] и указанным там методом определения пары к дробной производной, найдем пару для (21), и получим четвертую часть структуры общего решения:

$$y_4(x) = (x - 1)^{-a}((x + 1)^{-a-b-n-1}(x - 1)^{-n-1})^{(-a-n-1)}. \quad (22)$$

Покажем, что (22) является частью структуры. Функция

$$t(x) = (x + 1)^{m-b}(x - 1)^{m+a}, \quad (23)$$

отличается от (6) только знаком при a , тогда подстановкой

$$a \Rightarrow -a, \quad (24)$$

в (8) получаем уравнение для (23)

$$(x+1)(x-1)t^{(m+2)}(x) + ((b-a+2)x-a-b)t^{(m+1)}(x) + (m+1)(b-a-m)t^{(m)}(x) = 0. \quad (25)$$

Тогда

$$(x+1)(x-1)z_m''(x) + ((b-a+2)x-a-b)z_m'(x) + (m+1)(b-a-m)z_m(x) = 0, \quad (26)$$

где

$$z_m(x) = t^{(m)}(x) = ((x+1)^{m-b}(x-1)^{m+a})^{(m)}. \quad (27)$$

Пусть

$$m = -a - n - 1, \quad (28)$$

тогда из (26) получим

$$(x+1)(x-1)z_m''(x) + ((b-a+2)x-a-b)z_m'(x) - (a+n)(b+n+1)z_m(x) = 0. \quad (29)$$

Пусть

$$z_m(x) = (x-1)^a y(x), \quad (30)$$

тогда из (29) получаем (2). Следовательно, из (27), (28), (30) получаем, что (22) является частью структуры.

Найдем пятую часть структуры. Функции (23) соответствуют уравнения (25), (26) и (27). Пусть

$$m = b + n, \quad (31)$$

тогда из (26) получим

$$(x+1)(x-1)z_m''(x) + ((b-a+2)x-a-b)z_m'(x) - (b+n+1)(a+n)z_m(x) = 0. \quad (32)$$

Пусть выполняется (30), тогда из (30), (32) получим (2). Так как из (27), (31) получаем

$$z_m(x) = t^{(m)}(x) = ((x+1)^n(x-1)^{a+b+n})^{(b+n)}. \quad (33)$$

то из (30), (33) получаем пятую часть структуры общего решения

$$y_5(x) = (x-1)^{-a}((x+1)^n(x-1)^{a+b+n})^{(b+n)}. \quad (34)$$

Из теоремы 1 в [3] и указанным там методом определения пары к дробной производной, найдем пару для (34), и получим шестую часть структуры общего решения:

$$y_6(x) = (x+1)^{-b}((x+1)^{-n-1}(x-1)^{-a-b-n-1})^{(-b-n-1)}. \quad (35)$$

Покажем, что (35) является частью структуры. Функции (13) соответствуют уравнения (15), (16) и (17). Пусть

$$m = -b - n - 1, \quad (36)$$

тогда из (16), (36) получаем

$$(x+1)(x-1)z_m''(x) + ((a-b+2)x+a+b)z_m'(x) - (b+n)(a+n+1)z_m(x) = 0, \quad (37)$$

Пусть выполняется (18). Тогда из (18), (37) получим (2). Тогда из (17), (36) получаем

$$z_m(x) = t^{(m)}(x) = ((x+1)^{-n-1}(x-1)^{-a-b-n-1})^{(-b-n-1)}, \quad (38)$$

а из (18), (38) получаем (35). Следовательно, (35) является частью структуры общего решения.

Найдем седьмую часть структуры общего решения. Функции (6) соответствуют уравнения (8), (9) и (10). Пусть

$$m = a + b + n, \quad (39)$$

тогда из (9) и (39) получим

$$(x+1)(x-1)z_m''(x) + ((a+b+2)x+a-b)z_m'(x) - n(a+b+n+1)z_m(x) = 0. \quad (40)$$

Поскольку уравнения (2) и (40) совпадают, отличаясь только обозначениями дифференцируемых функций, то из (10) и (39) получим седьмую часть структуры общего решения:

$$y_7(x) = ((x+1)^{a+n}(x-1)^{b+n})^{(a+b+n)}. \quad (41)$$

Из теоремы 1 в [3] и указанным там методом определения пары к дробной производной, найдем пару для (41), и получим восьмую часть структуры общего решения:

$$y_8(x) = (x+1)^{-b}(x-1)^{-a}((x+1)^{-a-n-1}(x-1)^{-b-n-1})^{(-a-b-n-1)}. \quad (42)$$

Покажем, что (42) является частью структуры. Функция

$$t(x) = (x+1)^{m+b}(x-1)^{m+a}, \quad (43)$$

отличается от функции (13) только знаком при a . Тогда, используя подстановку

$$a \Rightarrow -a, \quad (44)$$

получим из (16)

$$(x+1)(x-1)z_m''(x) + ((2-a-b)x-a+b)z_m'(x) - (m+1)(a+b+m)z_m(x) = 0, \quad (45)$$

где

$$z_m(x) = t^{(m)}(x) = ((x+1)^{m+b}(x-1)^{m+a})^{(m)}. \quad (46)$$

Пусть

$$m = -a - b - n - 1, \quad (47)$$

тогда из (45) получим

$$(x+1)(x-1)z_m''(x) + ((2-a-b)x - a+b)z_m'(x) - (n+1)(a+b+n)z_m(x) = 0, \quad (48)$$

Пусть

$$z_m(x) = (x+1)^b(x-1)^a y(x), \quad (49)$$

тогда из (48), (49) получим (2). Следовательно, (42) является частью структуры общего решения.

Из (4), (5), (21), (22), (34), (35), (41), (42) получим, что структурой общего решения дифференциального уравнения для многочленов Якоби является

$$\begin{aligned} y(x) = & C_1(x-1)^{-a}(1+x)^{-b}((x-1)^{n+a}(1+x)^{n+b})^{(n)} \\ & + C_2((x+1)^{-b-n-1}(x-1)^{-a-n-1})^{(-n-1)} + C_3(x+1)^{-b}((x+1)^{a+b+n}(x-1)^n)^{(a+n)} \\ & + C_4(x-1)^{-a}((x+1)^{-a-b-n-1}(x-1)^{-n-1})^{(-a-n-1)} \\ & + C_5(x-1)^{-a}((x+1)^n(x-1)^{a+b+n})^{(b+n)} \\ & + C_6(x+1)^{-b}((x+1)^{-n-1}(x-1)^{-a-b-n-1})^{(-b-n-1)} + C_7((x+1)^{a+b+n}(x-1)^{b+n})^{(a+b+n)} \\ & + C_8(x+1)^{-b}(x-1)^{-a}((x+1)^{-a-n-1}(x-1)^{-b-n-1})^{(-a-b-n-1)}. \end{aligned} \quad (50)$$

3. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Якоби, полученные из его дробных производных

Рассмотрим первую часть структуры общего решения уравнения (2). Она хорошо изучена и сводится к хорошо известным многочленам Якоби, являющиеся частным решением уравнения (141) при целых положительных n . Они выражаются через формулу Родрига (3), определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} 2(n+1)(n+a+b+1)(2n+a+b)P_{n+1}(x; a, b) = \\ (2n+a+b+1)[(2n+a+b)(2n+a+b+2)x + a^2 - b^2]P_n(x; a, b) \\ - 2(n+a)(n+b)(2n+a+b+2)P_{n-1}(x; a, b). \end{aligned} \quad (51)$$

при начальных условиях

$$P_0(x; a, b) = 1, P_1(x; a, b) = \frac{a-b+(a+b+2)x}{2}, \quad (52)$$

и выражаются через формулу:

$$P_n(x; a, b) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n+a}{k} \binom{n+b}{n-k} (x-1)^{n-k} (1+x)^k. \quad (53)$$

3.1. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Якоби при отрицательных целых n

О решении уравнения (2) при отрицательных целых n не упоминается ни в учебниках и справочниках, ни в современных работах, например, в [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]. Так же не упоминаются решения при целых $(n + a)$, $(n + b)$, $(n + a + b)$, которые будут также рассмотрены в этой работе.

Из (50) следует, что таким решением является (5). т.е.,

$$z_{-n-1}(x) = ((x + 1)^{-b-n-1}(1 - x)^{-a-n-1})^{(-n-1)}. \quad (54)$$

будет частным решением уравнения (2) для $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. Для удобства будем применять

$$m = -n - 1, \quad (55)$$

поскольку $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ при $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$.

Из (54) следует, что частью решения уравнения Лагерра для $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ являются многочлены степени m

$$S_m(x; a, b) = (x + 1)^b(1 - x)^a z_m(x) = (x + 1)^b(1 - x)^a ((x + 1)^{m-b}(1 - x)^{m-a})^{(m)}. \quad (56)$$

или

$$z_m(x) = (1 - x)^{-a}(1 + x)^{-b} S_m(x; a, b). \quad (57)$$

Тогда из (3), (56) следует

$$S_n(x; a, b) = (-1)^{-n} 2^n n! P_n(x; -a, -b). \quad (58)$$

Из (56) получим

$$S_0(x; a, b) = 1, S_1(x; a, b) = a - b + (a + b - 2)x. \quad (59)$$

Поскольку из (58) следует, что

$$P_n(x; a, b) = (-1)^n \frac{1}{2^n n!} S_n(x; -a, -b), \quad (60)$$

то, подставив (60) в (51), получим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} (n - a - b + 1)(2n - a - b)S_{n+1}(x; a, b) \\ + (2n - a - b + 1)[(2n - a - b)(2n - a - b + 2)x + a^2 - b^2]S_n(x; a, b) \\ + 4n(n - a)(n - b)(2n - a - b + 2)S_{n-1}(x; a, b) = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

подставив (60) в (53), получим

$$S_n(x; a, b) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n-a}{k} \binom{n-b}{n-k} (x-1)^{n-k} (1+x)^k. \quad (62)$$

Тогда из (54), (57), (62) следует, что решением уравнения (2) при отрицательных целых n будет

$$y(x) = (1-x)^{-a}(1+x)^{-b} \sum_{k=0}^{-n-1} \binom{-n-1-a}{k} \binom{-n-1-b}{-n-1-k} (x-1)^{-n-1-k} (1+x)^k. \quad (63)$$

3.2. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Якоби при неотрицательных целых $(a+n)$

Рассмотрим решение уравнения (2) при неотрицательных целых $(a+n)$. Из (21), (50) следует, что таким решением является

$$z_{n+a}(x) = (x+1)^{-b} ((x+1)^{a+b+n} (1-x)^n)^{(a+n)}. \quad (64)$$

Пусть

$$m = n + a, \quad (65)$$

поскольку $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ при $(a+n) \in \mathbb{Z}$, $a+n \geq 0$.

Из (64) следует, что частью решения уравнения Лагерра для $(a+n) \in \mathbb{Z}$, $a+n \geq 0$ являются многочлены степени m

$$S_m(x; a, b) = (1-x)^a z_m(x) = (x+1)^{-b} (1-x)^a ((x+1)^{m+b} (1-x)^{m-a})^{(m)}. \quad (66)$$

или

$$z_m(x) = (1-x)^{-a} S_m(x; a, b). \quad (67)$$

Тогда из (3), (66) следует

$$S_n(x; a, b) = (-1)^{-n} 2^n n! P_n(x; -a, b). \quad (68)$$

Из (66) получим

$$S_0(x; a, b) = 1, S_1(x; a, b) = a + b + (a - b - 2)x. \quad (69)$$

Поскольку из (68) следует, что

$$P_n(x; a, b) = (-1)^n \frac{1}{2^n n!} S_n(x; -a, b), \quad (70)$$

то, подставив (70) в (51), получим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} (n-a+b+1)(2n-a+b)S_{n+1}(x; a, b) + \\ (2n-a+b+1)[(2n-a+b)(2n-a+b+2)x + a^2 - b^2]S_n(x; a, b) \\ + 4n(n-a)(n+b)(2n-a+b+2)S_{n-1}(x; a, b) = 0, \end{aligned} \quad (71)$$

подставив (70) в (53), получим

$$S_n(x; a, b) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n-a}{k} \binom{n+b}{n-k} (x-1)^{n-k} (1+x)^k. \quad (72)$$

Тогда из (64), (67), (72) следует, что решением уравнения (2) при неотрицательных целых $(a + n)$ будет

$$y(x) = (1-x)^{-a} \sum_{k=0}^{n+a} \binom{n}{k} \binom{n+a+b}{n+a-k} (x-1)^{n+a-k} (1+x)^k. \quad (73)$$

3.3. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Якоби при отрицательных целых $(a + n)$

Рассмотрим решение уравнения (2) при отрицательных целых $(a + n)$. Из (22), (50) следует, что таким решением является

$$z_{-n-a-1}(x) = (1-x)^{-a} ((x+1)^{-a-b-n-1} (1-x)^{-n-1})^{(-a-n-1)}. \quad (74)$$

Пусть

$$m = -n - a - 1, \quad (75)$$

поскольку $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ при $(-n - a - 1) \in \mathbb{Z}$, $-n - a - 1 \geq 0$.

Из (74) следует, что частью решения уравнения Лагерра для $(a + n) \in \mathbb{Z}$, $a + n < 0$ являются многочлены степени m

$$S_m(x; a, b) = (x+1)^b z_m(x) = (x+1)^b (1-x)^{-a} ((x+1)^{m-b} (1-x)^{m+a})^{(m)}. \quad (76)$$

или

$$z_m(x) = (x+1)^{-b} S_m(x; a, b). \quad (77)$$

Тогда из (3), (76) следует

$$S_n(x; a, b) = (-1)^{-n} 2^n n! P_n(x; a, -b). \quad (78)$$

Из (76) получим

$$S_0(x; a, b) = 1, S_1(x; a, b) = (b - a - 2)x - a - b. \quad (79)$$

Поскольку из (78) следует, что

$$P_n(x; a, b) = (-1)^n \frac{1}{2^n n!} S_n(x; a, -b), \quad (80)$$

то, подставив (80) в (51), получим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} (n + a - b + 1)(2n + a - b)S_{n+1}(x; a, b) \\ + (2n + a - b + 1)[(2n + a - b)(2n + a - b + 2)x + a^2 - b^2]S_n(x; a, b) \\ + 4n(n + a)(n - b)(2n + a - b + 2)S_{n-1}(x; a, b) = 0. \end{aligned} \quad (81)$$

подставив (80) в (53), получим

$$S_n(x; a, b) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n+a}{k} \binom{n-b}{n-k} (x-1)^{n-k} (1+x)^k. \quad (82)$$

Тогда из (74), (77), (82) следует, что решением уравнения (2) при отрицательных целых $(a + n)$ будет

$$y(x) = (x+1)^{-b} \sum_{k=0}^{-n-a-1} \binom{-n-1}{k} \binom{-n-a-b-1}{-n-a-k-1} (x-1)^{-n-a-k-1} (1+x)^k. \quad (83)$$

3.4. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Якоби при неотрицательных целых $(b + n)$

Рассмотрим решение уравнения (2) при неотрицательных целых $(b + n)$. Из (34), (50) следует, что таким решением является

$$z_{n+b}(x) = (1-x)^{-a} ((x+1)^n (1-x)^{a+b+n})^{(b+n)}. \quad (84)$$

Пусть

$$m = n + b, \quad (85)$$

поскольку $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ при $(b + n) \in \mathbb{Z}$, $b + n \geq 0$.

Из (84) следует, что частью решения уравнения Лагерра для $(b + n) \in \mathbb{Z}$, $b + n \geq 0$ являются многочлены степени m

$$S_m(x; a, b) = (x+1)^b z_m(x) = (x+1)^b (1-x)^{-a} ((x+1)^{m-b} (1-x)^{m+a})^{(m)}. \quad (86)$$

или

$$z_m(x) = (x+1)^{-b} S_m(x; a, b). \quad (87)$$

Тогда из (3), (86) следует (78), (79), (80), (81), (82). Из (82), (84), (87) следует, что решением уравнения (2) при неотрицательных целых $(b + n)$ будет

$$y(x) = (x+1)^{-b} \sum_{k=0}^{n+b} \binom{n+a+b}{k} \binom{n}{n+b-k} (x-1)^{n+b-k} (1+x)^k. \quad (88)$$

3.5. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Якоби при отрицательных целых $(b + n)$

Рассмотрим решение уравнения (2) при отрицательных целых $(b + n)$. Из (35), (50) следует, что таким решением является

$$z_{-n-b-1}(x) = (x+1)^{-b} ((x+1)^{-n-1} (1-x)^{-a-b-n-1})^{(-b-n-1)}. \quad (89)$$

Пусть

$$m = -n - b - 1, \quad (90)$$

поскольку $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ при $(-n - b - 1) \in \mathbb{Z}$, $-n - b - 1 \geq 0$.

Из (89) следует, что частью решения уравнения Лагерра для $(b + n) \in \mathbb{Z}$, $b + n < 0$ являются многочлены степени m

$$S_m(x; a, b) = (1 - x)^a z_m(x) = (x + 1)^{-b} (1 - x)^a ((x + 1)^{m+b} (1 - x)^{m-a})^{(m)}. \quad (91)$$

или

$$z_m(x) = (1 - x)^{-a} S_m(x; a, b). \quad (92)$$

Тогда из (3), (91) следует (68), (69), (70), (71), (72). Из (72), (89), (92) следует, что решением уравнения (2) при отрицательных целых $(b + n)$ будет

$$y(x) = (1 - x)^{-a} \sum_{k=0}^{-n-b-1} \binom{-n-a-b-1}{k} \binom{-n-1}{-n-b-k-1} (x - 1)^{-n-b-k-1} (1 + x)^k. \quad (93)$$

3.6. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Якоби при неотрицательных целых $(a + b + n)$

Рассмотрим решение уравнения (2) при неотрицательных целых $(a + b + n)$. Из (41), (50) следует, что таким решением является

$$z_{n+a+b}(x) = ((x + 1)^{a+n} (1 - x)^{b+n})^{(a+b+n)}. \quad (94)$$

Пусть

$$m = n + a + b, \quad (95)$$

поскольку $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ при $(a + b + n) \in \mathbb{Z}$, $a + b + n \geq 0$.

Из (94) следует, что частью решения уравнения Лагерра для $(a + b + n) \in \mathbb{Z}$, $a + b + n \geq 0$ являются многочлены степени m

$$S_m(x; a, b) = (x + 1)^b (1 - x)^a z_m(x) = (x + 1)^b (1 - x)^a ((x + 1)^{m-b} (1 - x)^{m-a})^{(m)}. \quad (96)$$

или

$$z_m(x) = (x + 1)^{-b} (1 - x)^{-a} S_m(x; a, b). \quad (97)$$

Тогда из (3), (96) следует (58), (59), (60), (61), (62). Из (62), (94), (97) следует, что решением уравнения (2) при неотрицательных целых $(a + b + n)$ будет

$$y(x) = (x + 1)^{-b} (1 - x)^{-a} \sum_{k=0}^{n+a+b} \binom{n+b}{k} \binom{n+a}{n+a+b-k} (x - 1)^{n+a+b-k} (1 + x)^k. \quad (98)$$

3.7. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Якоби при отрицательных целых $(a + b + n)$

Рассмотрим решение уравнения (2) при отрицательных целых $(a + b + n)$. Из (42), (50) следует, что таким решением является

$$z_{-a-b-n-1}(x) = (x + 1)^{-b}(1 - x)^{-a}((x + 1)^{-a-n-1}(1 - x)^{-b-n-1})^{(-a-b-n-1)}. \quad (99)$$

Пусть

$$m = -a - b - n - 1, \quad (100)$$

поскольку $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ при $(a + b + n) \in \mathbb{Z}$, $a + b + n < 0$.

Из (99) следует, что частью решения уравнения Лагерра для $(a + b + n) \in \mathbb{Z}$, $a + b + n < 0$ являются многочлены степени m

$$S_m(x; a, b) = z_m(x) = (x + 1)^{-b}(1 - x)^{-a}((x + 1)^{m+b}(1 - x)^{m+a})^{(m)}. \quad (101)$$

Тогда из (3), (101) следует

$$S_n(x; a, b) = (-1)^{-n} 2^n n! P_n(x; a, b). \quad (102)$$

Из (101) получим

$$S_0(x; a, b) = 1, S_1(x; a, b) = b - a - (a + b + 2)x, \quad (103)$$

Из (102) получим

$$P_n(x; a, b) = (-1)^n \frac{1}{2^n n!} S_n(x; a, b). \quad (104)$$

Подставив (104) в (51), получим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} (n + a + b + 1)(2n + a + b)S_{n+1}(x; a, b) \\ + (2n + a + b + 1)[(2n + a + b)(2n + a + b + 2)x + a^2 - b^2]S_n(x; a, b) \\ + 4n(n + a)(n + b)(2n + a + b + 2)S_{n-1}(x; a, b) = 0. \end{aligned} \quad (105)$$

Из (53), (104) получим

$$S_n(x; a, b) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n+a}{k} \binom{n+b}{n-k} (x-1)^{n-k} (1+x)^k. \quad (106)$$

Из (99), (101) следует, что решением уравнения (2) при отрицательных целых $(a + b + n)$ будет

$$y(x) = \sum_{k=0}^{-a-b-n-1} \binom{-b-n-1}{k} \binom{-a-n-1}{-a-b-n-k-1} (x-1)^{-a-b-n-k-1} (1+x)^k. \quad (107)$$

4. Структура общего решения дифференциального уравнения для многочленов Гегенбауэра

Дифференциальное уравнение для многочленов Гегенбауэра

$$(1 - x^2)y''(x) - (2a + 1)xy'(x) + n(n + 2a)y(x) = 0, \quad (108)$$

можно получить из уравнения (2) подстановкой

$$\begin{pmatrix} a \Rightarrow a - \frac{1}{2}, \\ b \Rightarrow a - \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Следовательно, получим структуру общего решения дифференциального уравнения для многочленов Гегенбауэра подстановкой (109) в (50)

$$\begin{aligned} y(x) = & C_1(1 - x^2)^{\frac{1}{2}-a}((1 - x^2)^{n+a-\frac{1}{2}})^{(n)} + C_2((1 - x^2)^{-a-n-\frac{1}{2}})^{(-n-1)} \\ & + C_3(x + 1)^{\frac{1}{2}-a}((x + 1)^{2a+n-1}(1 - x)^n)^{(a+n-\frac{1}{2})} \\ & + C_4(1 - x)^{\frac{1}{2}-a}((x + 1)^{-2a-n}(1 - x)^{-n-1})^{(-a-n-\frac{1}{2})} \\ & + C_5(1 - x)^{\frac{1}{2}-a}((x + 1)^n(1 - x)^{2a+n-1})^{(a+n-\frac{1}{2})} \\ & + C_6(x + 1)^{\frac{1}{2}-a}((x + 1)^{-n-1}(1 - x)^{-2a-n})^{(-a-n-\frac{1}{2})} + C_7((1 - x^2)^{a+n-\frac{1}{2}})^{(2a+n-1)} \\ & + C_8(1 - x^2)^{\frac{1}{2}-a}((1 - x^2)^{-a-n-\frac{1}{2}})^{(-2a-n)}. \end{aligned} \quad (110)$$

5. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Гегенбауэра, полученные из его дробных производных

Многочлены Гегенбауэра степени n являются частным решением уравнения (108), которые при $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, определяются формулой Родрига, которая соответствует первому частному решению из (110)

$$C_n(x; a) = \frac{(-2)^n \Gamma(n + a) \Gamma(n + 2a)}{n! \Gamma(a) \Gamma(2n + 2a)} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}-a} ((1 - x^2)^{n+a-\frac{1}{2}})^{(n)}, \quad (111)$$

и для них выполняются рекуррентные соотношения:

$$C_0(x; a) = 1, C_1(x; a) = 2ax. \quad (112)$$

$$(n + 2)C_{n+2}(x; a) = 2(a + n + 1)x C_{n+1}(x; a) - (2a + n)C_n(x; a). \quad (113)$$

Они также могут быть представлены в виде

$$C_n(x; a) = \sum_{k=0}^{k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \frac{\Gamma(n + a - k)}{\Gamma(a) k! (n - 2k)!} (2x)^{n-2k}. \quad (114)$$

5.1. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Гегенбауэра при отрицательных целых n

Также, как с функцией Эрмита, функцией Лагерра и функцией Якоби, значения в элементарных функциях функции Гегенбауэра $C_n(x; a)$ указаны лишь для случая неотрицательных целых n , для других случаев значения не указаны. Например, указана формула Родрига (111), вследствие чего, найти решение для отрицательных целых n кажется невозможным.

Случаи, когда решение уравнения (108) включает в себя многочлены, если n не является неотрицательным целым числом, не рассматривается ни в учебниках и справочниках, см. [6], [7], [16, с. 177–182], [17, с. 380–381], [18], так в и в более современных работах, например, [15], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25].

Все частные решения уравнения (108) получаются из частных решений уравнения (2) подстановкой (109).

Рассмотрим частные решения уравнения (108) для отрицательных целых n . Из (110) следует, что таким решением является

$$y(x) = ((1 - x^2)^{-a-n-\frac{1}{2}})^{(-n-1)}. \quad (115)$$

Из (56), (109) следует, что частью решения уравнения (108) для $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ являются многочлены степени m

$$S_m(x; a) = (1 - x^2)^{a-\frac{1}{2}} y(x) = (1 - x^2)^{a-\frac{1}{2}} ((1 - x^2)^{m-a+\frac{1}{2}})^{(m)}, \quad (116)$$

где

$$m = -n - 1, \quad (117)$$

или

$$y(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}-a} S_m(x; a). \quad (118)$$

Из (111), (116) следует

$$C_n(x; a) = \frac{(-2)^n \Gamma(n+a) \Gamma(n+2a)}{n! \Gamma(a) \Gamma(2n+2a)} S_n(x; 1-a), \quad (119)$$

или

$$S_n(x; a) = \frac{n! \Gamma(1-a) \Gamma(2n+2-2a)}{(-2)^n \Gamma(n+1-a) \Gamma(n+2-2a)} C_n(x; 1-a). \quad (120)$$

Из (59), (109) получим

$$S_0(x; a) = 1, S_1(x; a) = (2a - 3)x. \quad (121)$$

Подставив (109) в (61), получим рекуррентное соотношение

$$(n - 2a + 2)S_{n+1}(x; a, b) + (2n - 2a + 2)(2n - 2a + 3)xS_n(x; a, b) + n(2n - 2a + 1)(2n - 2a + 3)S_{n-1}(x; a, b) = 0. \quad (122)$$

Из (114), (120) получаем

$$S_n(x; a) = \frac{n! \Gamma(1-a) \Gamma(2n+2-2a)}{(-2)^n \Gamma(n+1-a) \Gamma(n+2-2a)} \sum_{k=0}^{k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \frac{\Gamma(n-a-k+1)}{\Gamma(1-a) k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \quad (123)$$

Из (117), (118), (123) следует, что решением уравнения (108) при отрицательных целых n будет

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}-a} \frac{(-n-1)! \Gamma(1-a) \Gamma(-2a-2n)}{(-2)^{-n-1} \Gamma(-a-n) \Gamma(1-2a-n)} * \sum_{k=0}^{k \leq \frac{-n-1}{2}} (-1)^k \frac{\Gamma(-n-a-k)}{\Gamma(1-a) k! (-n-2k-1)!} (2x)^{-n-2k-1}. \quad (124)$$

5.2. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Гегенбауэра при неотрицательных целых $(a + n - 1/2)$

Рассмотрим решение уравнения (108) при неотрицательных целых $(a + n - 1/2)$. Из (110) следует, что таких решений два. Рассмотрим первое из них:

$$y(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}-a} ((x+1)^{2a+n-1} (1-x)^n)^{(a+n-\frac{1}{2})}. \quad (125)$$

Поскольку (125) получается из (21) подстановкой (109), то получим подстановкой (109) значение частного решения (125), значение содержащихся в нем многочленов и рекуррентное соотношение для них.

Из (66) подстановкой (109) получим многочлены степени m , являющиеся частью частного решения (125):

$$S_m(x; a) = (1-x)^{a-\frac{1}{2}} y(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}-a} (1-x)^{a-\frac{1}{2}} ((x+1)^{m+a-\frac{1}{2}} (1-x)^{m-a+\frac{1}{2}})^{(m)}, \quad (126)$$

следовательно,

$$y(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}-a} S_m(x; a). \quad (127)$$

Из (126) получим

$$S_0(x; a) = 1, S_1(x; a) = 2a - 2x - 1. \quad (128)$$

Подстановкой (109) в (71), получим рекуррентное соотношение

$$S_{n+1}(x; a) + 2(2n+1)xS_n(x; a) + (2n+1-2a)(2n+2a-1)S_{n-1}(x; a) = 0. \quad (129)$$

Подстановкой (109) в (72), получим выражение для многочленов

$$S_n(x; a) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n-a+\frac{1}{2}}{k} \binom{n+a-\frac{1}{2}}{n-k} (x-1)^{n-k} (1+x)^k. \quad (130)$$

Подстановкой (109) в (73), получим решение (125) уравнения (108) при неотрицательных целых $(a + n - 1/2)$:

$$y(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}-a} \sum_{k=0}^{n+a-\frac{1}{2}} \binom{n}{k} \binom{n+2a-1}{n+a-k-\frac{1}{2}} (x-1)^{n+a-k-\frac{1}{2}} (1+x)^k. \quad (131)$$

Вторым решением уравнения (108) при неотрицательных целых $(a + n - 1/2)$ является

$$y(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}-a} ((x+1)^n (1-x)^{2a+n-1})^{(a+n-\frac{1}{2})}. \quad (132)$$

Поскольку (132) получается из (34) подстановкой (109), то получим подстановкой (109) значение частного решения (132), значение содержащихся в нем многочленов и рекуррентное соотношение для них.

Из (86) подстановкой (109) получим многочлены степени m , являющиеся частью частного решения (132):

$$S_m(x; a) = (x+1)^{a-\frac{1}{2}} y(x) = (x+1)^{a-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}-a} ((x+1)^{m-a+\frac{1}{2}} (1-x)^{m+a-\frac{1}{2}})^{(m)}, \quad (133)$$

следовательно,

$$y(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}-a} S_m(x; a). \quad (134)$$

Из (133) получим

$$S_0(x; a) = 1, S_1(x; a) = 1 - 2a - 2x. \quad (135)$$

Подстановкой (109) в (81), получим рекуррентное соотношение (129). Подстановкой (109) в (82), получим выражение для многочленов

$$S_n(x; a, b) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n+a-\frac{1}{2}}{k} \binom{n-a+\frac{1}{2}}{n-k} (x-1)^{n-k} (1+x)^k. \quad (136)$$

Подстановкой (109) в (88), получим решение (132) уравнения (108) при неотрицательных целых $(a + n - 1/2)$:

$$y(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}-a} \sum_{k=0}^{n+a-\frac{1}{2}} \binom{n+2a-1}{k} \binom{n}{n+a-k-\frac{1}{2}} (x-1)^{n+a-k-\frac{1}{2}} (1+x)^k. \quad (137)$$

Следовательно, получили два линейно независимых решения, (131) и (137), уравнения (108) при неотрицательных целых $(a + n - 1/2)$.

5.3. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Гегенбауэра при отрицательных целых $(a + n - 1/2)$

Рассмотрим решение уравнения (108) при отрицательных целых $(a + n - 1/2)$. Из (110) следует, что таких решений два. Рассмотрим первое из них:

$$y(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}-a}((x+1)^{-2a-n}(1-x)^{-n-1})^{(-a-n-\frac{1}{2})}. \quad (138)$$

Поскольку (138) получается из (22) подстановкой (109), то получим подстановкой (109) значение частного решения (138), значение содержащихся в нем многочленов и рекуррентное соотношение для них.

Из (76) подстановкой (109) получим многочлены степени m , являющиеся частью частного решения (138):

$$S_m(x; a) = (x+1)^{a-\frac{1}{2}}y(x) = (x+1)^{a-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}-a}((x+1)^{m-a+\frac{1}{2}}(1-x)^{m+a-\frac{1}{2}})^{(m)}, \quad (139)$$

следовательно,

$$y(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}-a}S_m(x; a). \quad (140)$$

Из (139) получим

$$S_0(x; a) = 1, S_1(x; a) = 1 - 2a - 2x. \quad (141)$$

Подстановкой (109) в (81), получим рекуррентное соотношение

$$S_{n+1}(x; a) + 2(2n+1)xS_n(x; a) + (2n+1-2a)(2n+2a-1)S_{n-1}(x; a) = 0. \quad (142)$$

Подстановкой (109) в (82), получим выражение для многочленов

$$S_n(x; a) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n+a-\frac{1}{2}}{k} \binom{n-a+\frac{1}{2}}{n-k} (x-1)^{n-k} (1+x)^k. \quad (143)$$

Подстановкой (109) в (83), получим решение (138) уравнения (108) при отрицательных целых $(a+n-1/2)$:

$$y(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}-a} \sum_{k=0}^{-n-a-\frac{1}{2}} \binom{-n-1}{k} \binom{-n-2a}{-n-a-k-\frac{1}{2}} (x-1)^{-n-a-k-\frac{1}{2}} (1+x)^k. \quad (144)$$

Вторым решением уравнения (108) при отрицательных целых $(a+n-1/2)$ является

$$y(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}-a}((x+1)^{-n-1}(1-x)^{-2a-n})^{(-a-n-\frac{1}{2})}. \quad (145)$$

Поскольку (145) получается из (35) подстановкой (109), то получим подстановкой (109) значение частного решения (145), значение содержащихся в нем многочленов и рекуррентное соотношение для них.

Из (91) подстановкой (109) получим многочлены степени m , являющиеся частью частного решения (145):

$$S_m(x; a) = (1-x)^{a-\frac{1}{2}}y(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}-a}(1-x)^{a-\frac{1}{2}}((x+1)^{m+a-\frac{1}{2}}(1-x)^{m-a+\frac{1}{2}})^{(m)}, \quad (146)$$

следовательно,

$$y(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}-a} S_m(x; a). \quad (147)$$

Из (146) получим

$$S_0(x; a) = 1, S_1(x; a) = 2a - 2x - 1. \quad (148)$$

Подстановкой (109) в (71), получим рекуррентное соотношение для (146).

$$S_{n+1}(x; a) + 2(2n+1)xS_n(x; a) + (2n-2a+1)(2n+2a-1)S_{n-1}(x; a) = 0. \quad (149)$$

Подстановкой (109) в (72), получим выражение для многочленов

$$S_n(x; a) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n-a+\frac{1}{2}}{k} \binom{n+a-\frac{1}{2}}{n-k} (x-1)^{n-k} (1+x)^k. \quad (150)$$

Подстановкой (109) в (93), получим решение (145) уравнения (108) при отрицательных целых $(a+n-1/2)$:

$$y(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}-a} \sum_{k=0}^{-n-a-\frac{1}{2}} \binom{-n-2a}{k} \binom{-n-1}{-n-a-k-\frac{1}{2}} (x-1)^{-n-a-k-\frac{1}{2}} (1+x)^k. \quad (151)$$

Следовательно, получили два линейно независимых решения, (131) и (137), уравнения (108) при отрицательных целых $(a+n-1/2)$.

5.4. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Гегенбауэра при неотрицательных целых $(2a+n-1)$

Рассмотрим решение уравнения (108) при неотрицательных целых $(2a+n-1)$. Из (110) следует, что им является:

$$y(x) = ((1-x^2)^{a+n-\frac{1}{2}})^{(2a+n-1)}. \quad (152)$$

Поскольку (152) получается из (41) подстановкой (109), то получим подстановкой (109) значение частного решения (152), значение содержащихся в нем многочленов и рекуррентное соотношение для них.

Из (96) подстановкой (109) получим многочлены степени m , являющиеся частью частного решения (152):

$$S_m(x; a) = (1-x^2)^{a-\frac{1}{2}} y(x) = (1-x^2)^{a-\frac{1}{2}} ((1-x^2)^{m-a+\frac{1}{2}})^{(m)}. \quad (153)$$

следовательно,

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}-a} S_m(x; a). \quad (154)$$

Из (153) получим

$$S_0(x; a) = 1, S_1(x; a) = (2a-3)x. \quad (155)$$

Подстановкой (109) в (61), получим рекуррентное соотношение

$$(n - 2a + 2)S_{n+1}(x; a) + (2n - 2a + 2)(2n - 2a + 3)xS_n(x; a) + n(2n - 2a + 1)(2n - 2a + 3)S_{n-1}(x; a) = 0. \quad (156)$$

Подстановкой (109) в (62), получим выражение для многочленов

$$S_n(x; a) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n - a + \frac{1}{2}}{k} \binom{n - a + \frac{1}{2}}{n - k} (x - 1)^{n-k} (1 + x)^k. \quad (157)$$

Подстановкой (109) в (98), получим решение (138) уравнения (108) при отрицательных целых $(a + n - 1/2)$:

$$y(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}-a} \sum_{k=0}^{n+2a-1} \binom{n + a - \frac{1}{2}}{k} \binom{n + a - \frac{1}{2}}{n + 2a - k - 1} (x - 1)^{n+2a-k-1} (1 + x)^k. \quad (158)$$

5.5. Частные решения дифференциального уравнения для многочленов Гегенбауэра при отрицательных целых $(2a + n - 1)$

Рассмотрим решение уравнения (108) при отрицательных целых $(2a + n - 1)$. Из (110) следует, что им является:

$$y(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}-a} ((1 - x^2)^{-a-n-\frac{1}{2}})^{(-2a-n)}. \quad (159)$$

Поскольку (159) получается из (42) подстановкой (109), то получим подстановкой (109) значение частного решения (159), значение содержащихся в нем многочленов и рекуррентное соотношение для них.

Из (101) подстановкой (109) получим многочлены степени m , являющиеся частью частного решения (159):

$$S_m(x; a) = y(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}-a} ((1 - x^2)^{m+a-\frac{1}{2}})^{(m)}. \quad (160)$$

Из (160) получим

$$S_0(x; a) = 1, S_1(x; a, b) = -(2a + 1)x, \quad (161)$$

Подстановкой (109) в (105), получим рекуррентное соотношение

$$(n + 2a)S_{n+1}(x; a) + (2n + 2a)(2n + 2a + 1)xS_n(x; a) + n(2n + 2a - 1)(2n + 2a + 1)S_{n-1}(x; a) = 0. \quad (162)$$

Подстановкой (109) в (106), получим выражение для многочленов

$$S_n(x; a) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n + a - \frac{1}{2}}{k} \binom{n + a - \frac{1}{2}}{n - k} (x - 1)^{n-k} (1 + x)^k. \quad (163)$$

Подстановкой (109) в (107), получим решение (138) уравнения (108) при отрицательных целых $(2a + n - 1)$:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{-n-2a} \binom{-n-a-\frac{1}{2}}{k} \binom{-n-a-\frac{1}{2}}{-n-2a-k} (x-1)^{-n-2a-k} (1+x)^k. \quad (164)$$

6. Метод получения значений дробных производных с рациональными или иррациональными показателями, основанный на использовании обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

Во введении было указано, что если структура общего решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения содержит четыре пары дробных производных (т.е. восемь), то появляется возможность представлять дробные производные с рациональными или иррациональными показателями как линейную комбинацию двух дробных производных с натуральными показателями, т.е. как линейную комбинацию известных функций.

Рассмотрим, как это применяется, на примере дифференциального уравнения для многочленов Якоби. Пусть

$$n = 1, a = 1 - \pi, b = \pi, \quad (165)$$

тогда для уравнения (2) при условии (165)

$$(1 - x^2)y''(x) + (2\pi - 1 - 3x)y'(x) + 3y(x) = 0, \quad (166)$$

получаем из (4) и (41), т.е. из

$$y_1(x) = (x-1)^{\pi-1}(1+x)^{-\pi}[(x-1)^{2-\pi}(1+x)^{\pi+1}]^{(1)}, \quad (167)$$

$$y_7(x) = ((x+1)^{2-\pi}(x-1)^{1+\pi})^{(2)}. \quad (168)$$

решение

$$y(x) = C_1(3x - 2\pi + 1) + C_2(x-1)^{\pi-1}(1+x)^{-\pi}(3x^2 + 4\pi x - 2x + 2\pi^2 - 2\pi - 1). \quad (169)$$

Из (50) следует, что (5), (21), (22), (34), (35), (42), т.е.

$$y_2(x) = ((x+1)^{-\pi-2}(x-1)^{\pi-3})^{(-2)}, \quad (170)$$

$$y_3(x) = (x+1)^{-\pi}((x+1)^2(x-1))^{(2-\pi)}, \quad (171)$$

$$y_4(x) = (x-1)^{\pi-1}((x+1)^{-3}(x-1)^{-2})^{(\pi-3)}, \quad (172)$$

$$y_5(x) = (x-1)^{\pi-1}((x+1)(x-1)^2)^{(\pi+1)}, \quad (173)$$

$$y_6(x) = (x+1)^{-\pi}((x+1)^{-2}(x-1)^{-3})^{(-\pi-2)}, \quad (174)$$

$$y_8(x) = (x+1)^{-\pi}(x-1)^{\pi-1}((x+1)^{\pi-3}(x-1)^{-\pi-2})^{(-3)}, \quad (175)$$

также являются частными решениями уравнения (166). Следовательно, являются линейной комбинацией указанных в (169) функций.

Тогда из (169), (170) получим

$$\exists K_1, K_2; ((x+1)^{-\pi-2}(x-1)^{\pi-3})^{(-2)} = K_1(3x-2\pi+1) + K_2(x-1)^{\pi-1}(1+x)^{-\pi}(3x^2+4\pi x-2x+2\pi^2-2\pi-1). \quad (176)$$

Из (169), (171) получим

$$\exists K_1, K_2; ((x+1)^2(x-1))^{(2-\pi)} = K_1(x+1)^\pi(3x-2\pi+1) + K_2(x-1)^{\pi-1}(3x^2+4\pi x-2x+2\pi^2-2\pi-1). \quad (177)$$

Из (169), (172) получим

$$\exists K_1, K_2; ((x+1)^{-3}(x-1)^{-2})^{(\pi-3)} = K_1(x-1)^{1-\pi}(3x-2\pi+1) + K_2(1+x)^{-\pi}(3x^2+4\pi x-2x+2\pi^2-2\pi-1). \quad (178)$$

Из (169), (173) получим

$$\exists K_1, K_2; ((x+1)(x-1)^2)^{(\pi+1)} = K_1(x-1)^{1-\pi}(3x-2\pi+1) + K_2(1+x)^{-\pi}(3x^2+4\pi x-2x+2\pi^2-2\pi-1). \quad (179)$$

Из (169), (174) получим

$$\exists K_1, K_2; ((x+1)^{-2}(x-1)^{-3})^{(-\pi-2)} = K_1(x+1)^\pi(3x-2\pi+1) + K_2(x-1)^{\pi-1}(3x^2+4\pi x-2x+2\pi^2-2\pi-1). \quad (180)$$

Из (169), (175) получим

$$\exists K_1, K_2; ((x+1)^{\pi-3}(x-1)^{-\pi-2})^{(-3)} = K_1(x+1)^\pi(x-1)^{1-\pi}(3x-2\pi+1) + K_2(3x^2+4\pi x-2x+2\pi^2-2\pi-1). \quad (181)$$

Существуют методы, которые в некоторых случаях позволяют сводить дробную производную, соответствующую обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка, не к линейной комбинации известных функций, а к известной функции с точностью до константы. Но эти методы не рассматриваются в этой работе, поскольку их изложение не является целью работы.

Список литературы

- [1] Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1979. – 416 с.
- [2] Лѣтниковъ А. В. Теорія дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ. Матем. сб., 1868, том 3, номер 1, с. 1–68.
- [3] Зайков С.Ю. Структура общего решения уравнения Эрмита и решение при отрицательных целых n . https://archive.org/details/20260122_20260122_1442
- [4] Зайков С.Ю. Структура общего решения уравнений Лагерра и Уиттекера, и решение при отрицательных целых n . https://archive.org/details/20260122_20260122_1601
- [5] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. М.: Наука, 1974. – 295 с.
- [6] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ИФ «Физ-мат. лит.», 2001. – 576 с.
- [7] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. – 576 с.

- [8] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1. – М.: Госиздат физико–математической литературы, 1962. – 464 с.
- [9] Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.: Госиздат иностранной литературы, 1948. – 260 с.
- [10] Ben–Yu Guo, Jie Shen, Li–Lian Wang. Generalized Jacobi polynomials/functions and their applications. *Applied Numerical Mathematics*. 2009. Vol. 59(5), pp. 1011–1028.
- [11] Bavinck H. A note on the Koekoeks' differential equation for generalized Jacobi polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2000. Vol. 115(1–2), pp. 87–92.
- [12] Koekoek J., Koekoek R. Differential equations for generalized Jacobi polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2000. Vol. 126(1–2), pp. 1–31.
- [13] Doha E.H. On the coefficients of differentiated expansions and derivatives of Jacobi polynomials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2002. Vol. 35(15), 3467.
- [14] Imani Ah., Aminataei A., Imani Al. Collocation Method via Jacobi Polynomials for Solving Nonlinear Ordinary Differential Equations. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. May 2011.
- [15] Yuan Xu. An integral formula for generalized Gegenbauer polynomials and Jacobi polynomials. *Advances in Applied Mathematics*. 2002. Vol. 29(2), pp. 328–343.
- [16] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука, 1973. – 294 с.
- [17] Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – М.: Наука, 1976. – 864 с.
- [18] Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия. Т. 4 Случ по Я 1985. 623 с.
- [19] Nagel B. The relativistic Hermite polynomial is a Gegenbauer polynomial. *J. Math. Phys.* 1994. Vol. 35(4), pp. 1549–1554.
- [20] Belmehdi S. Generalized Gegenbauer orthogonal polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2001. Vol. 133(1–2), pp. 195–205.
- [21] Keiner J. Computing with Expansions in Gegenbauer Polynomials. *SIAM J. Sci. Comput.* 2009. Vol. 31(3), pp. 2151–2171.
- [22] Keiner J. Gegenbauer polynomials and semiseparable matrices. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. 2008, 30, pp. 26–53.
- [23] Yuan Xu. An integral formula for generalized Gegenbauer polynomials and Jacobi polynomials. *Advances in Applied Mathematics*. 2002. Vol. 29(2), pp. 328–343.
- [24] Issa K., Yisa B.M., Biazar J. Numerical solution of space fractional diffusion equation using shifted Gegenbauer polynomials. *Computational Methods for Differential Equations*. 2022. Vol. 10(2), pp. 431–444.
- [25] Al–Masaeed M.G., Rabei E.M., Muslih S.I., Baleanu D. Solving Conformable Gegenbauer Differential Equation and Exploring Its Generating Function. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*. 2024. Vol. 10, 163.

UDC 517.923, 517.926.4

The structure of the general solution of equations for Jacobi and Gegenbauer polynomials, and the solution for negative integer n .

Zaikov S.Yu.

Municipal autonomous institution of additional education "Sports School of Winter Sports of the City of Tomsk"

zaykov_tomsk@mail.ru

Abstract. Differential equations for classical Jacobi and Gegenbauer orthogonal polynomials are considered, along with the structure of their general solution. The structure of the general solution is considered to be a linear combination of eight particular solutions containing fractional derivatives. Solutions to Jacobi and Gegenbauer equations have been found for cases where the fractional derivative orders are natural numbers, including solutions for negative integer n . A method for obtaining fractional derivatives with rational and irrational orders is presented, based on ordinary linear second-order differential equations.

Keywords: linear differential equations, recurrence relations, fractional derivatives, Jacobi polynomials, Gegenbauer polynomials, Rodrigues' formula, gaps in reference books.